FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vektoranalysis

Anwendungen zur Divergenz und Rotation – Die Maxwell Gleichungen

Anwendungen Divergenz und Rotation

Anwendungsbeispiel

Übersicht:

- Divergenz und Rotation bei E-Feldern
- Divergenz und Rotation bei B-Feldern
- Maxwellgleichungen

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Anwendungen Divergenz und Rotation

Divergenz und Rotation

Wir wiederholen kurz die wichtigsten Punkte zur Divergenz und zur Rotation von Vektorfeldern…

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots\partial_{x_n}\right)\cdot\begin{pmatrix}F_1(\vec{x})\\ \vdots \\ F_n(\vec{x})\end{pmatrix} = \partial_{x_1}F_1(\vec{x}) + \partial_{x_2}F_2(\vec{x}) + \cdots \partial_{x_n}F_n(\vec{x})$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \partial_{x_2}\\ \partial_{x_3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_1(\vec{x})\\ F_2(\vec{x})\\ F_3(\vec{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_{x_2}F_3 - \partial_{x_3}F_2\\ \partial_{x_3}F_1 - \partial_{x_1}F_3\\ \partial_{x_1}F_2 - \partial_{x_2}F_1\end{pmatrix}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Eigenschaften/Interpretation Divergenz

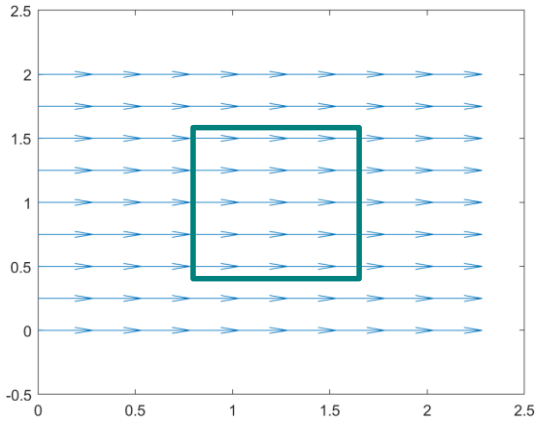
$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots\partial_{x_n}\right)\cdot\begin{pmatrix}F_1(\vec{x})\\ \vdots \\ F_n(\vec{x})\end{pmatrix} = \partial_{x_1}F_1(\vec{x}) + \partial_{x_2}F_2(\vec{x}) + \cdots \partial_{x_n}F_n(\vec{x})$$

Die Divergenz beschreibt Quellen/Senken:

$\operatorname{div}\vec{F} > 0$ ⇒ Quelle

$\operatorname{div}\vec{F} < 0$ ⇒ Senke

$\operatorname{div}\vec{F} = 0$ ⇒ quellfreies Feld



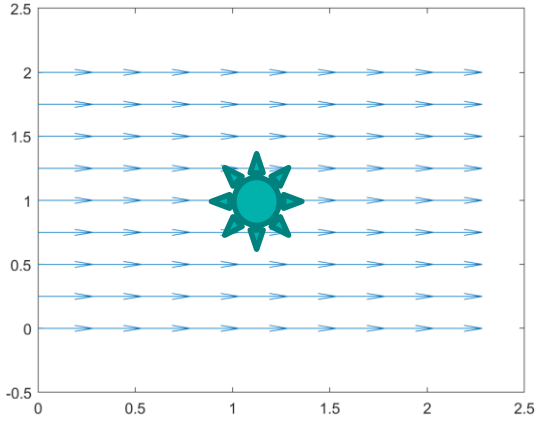
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix}c_1\\ 0\end{pmatrix}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Eigenschaften/Interpretation Rotation

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Wir stellen uns kleine Wasserräder in einer Strömung vor und untersuchen ob und wie sich diese drehen…



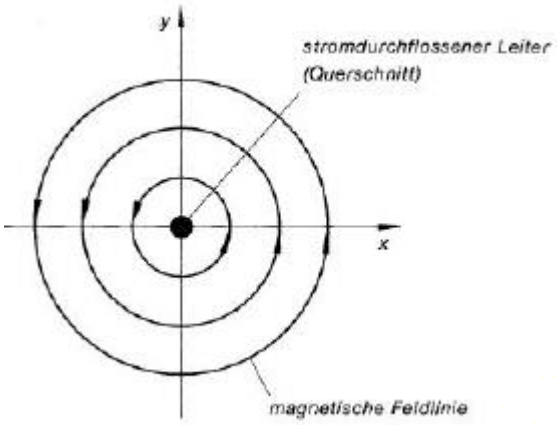
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

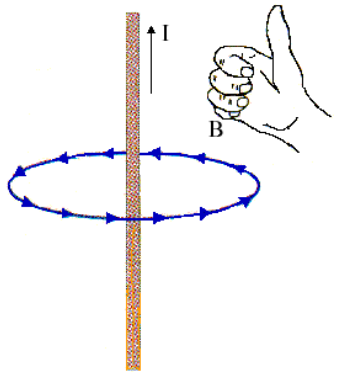
Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei Magnetfeldern

Wir betrachten das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters…

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



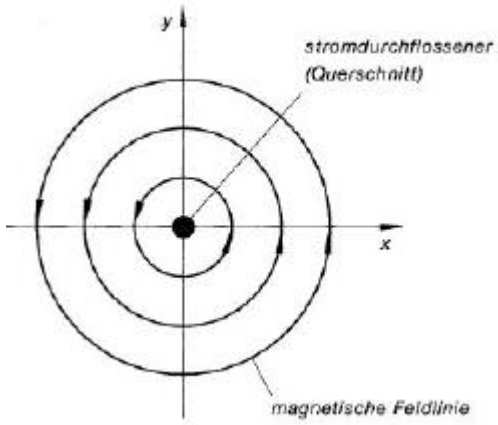


Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei Magnetfeldern

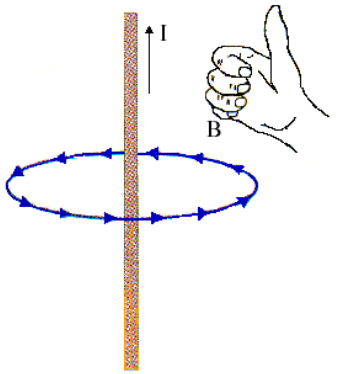
Wir betrachten das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters…

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wir bestimmen die Divergenz…

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = \partial_{x_1} B_1 + \partial_{x_2} B_2 = \mu_0 \cdot I \left(\frac{2x_1 x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} - \frac{2x_1 x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \right) = 0$$



Ist das ein Zufall oder immer null?

Divergenz bei Magnetfeldern

Es gilt generell für alle Magnetfelder $\vec{B}$:

Maxwell Gleichung (Gauß`sches Gesetz für Magnetfelder):

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Vektoranalysis

Anwendungen Divergenz und Rotation

Divergenz bei Magnetfeldern

Es gilt generell für alle Magnetfelder $\vec{B}$:

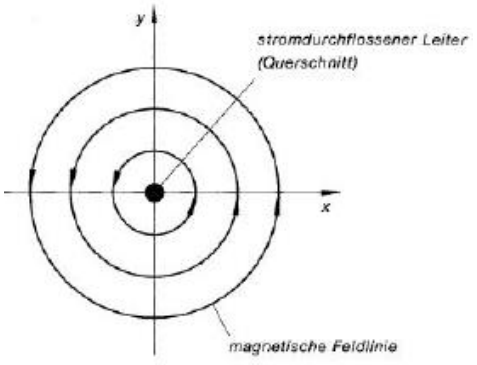
Maxwell Gleichung (Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder):

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Physikalische Interpretation/Bedeutung:

Magnetfelder sind quellfrei, d.h. es gibt keine Magnetischen quellen, was äquivalent dazu ist, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

Die Feldlinien sind geschlossen, da Anfang und Ende von Feldlinien immer bei Quellen und Senken liegen.



Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei E-Feldern

Wir betrachten das elektrische Feld $\vec{E}$ eines unendlich langen, homogen geladenen Zylinders…

Innenfeld: $$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$



Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei E-Feldern

Wir betrachten das elektrische Feld $\vec{E}$ eines unendlich langen, homogen geladenen Zylinders…



Innenfeld: $\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$

Wir berechnen die Divergenz…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_{x_1} E_1 + \partial_{x_2} E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(1+1) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei E-Feldern

Wir betrachten das elektrische Feld $\vec{E}$ eines unendlich langen, homogen geladenen Zylinders…

Außenfeld: $$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 \geq R^2$$



Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei E-Feldern

Wir betrachten das elektrische Feld $\vec{E}$ eines unendlich langen, homogen geladenen Zylinders…



Außenfeld: $$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 \geq R^2$$

Wir berechnen die Divergenz…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_{x_1} E_1 + \partial_{x_2} E_2 = 0$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Divergenz bei E-Feldern

Wir fassen die Ergebnisse zusammen…

Innenfeld:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ ⟸ Ladungen sind Quellen

Außenfeld:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$ ⟸ Keine Quellen



Ist das ein Zufall oder immer so?

Anwendungen Divergenz und Rotation

Divergenz bei E-Feldern

Es gilt generell für alle E-Felder $\vec{E}$:

Maxwell Gleichung (Gauß`sches Gesetz):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Divergenz bei E-Feldern

Es gilt generell für alle E-Felder $\vec{E}$:

Maxwell Gleichung (Gauß`sches Gesetz):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Physikalische Interpretation/Bedeutung:

Ladungen sind Quellen (Senken) des elektrischen Feldes.

Sind Ladungen vorhanden ist die Divergenz ungleich null.

Sind keine Ladungen vorhanden verschwindet die Divergenz.

Die Feldlinien beginnen bei den Ladungen und sind nicht geschlossen.

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Rotation bei E-Feldern

Wir betrachten wieder das E-Feld des unendlich langen, homogenen Zylinders…

Innenfeld: $$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$

Außenfeld: $$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 \left(x_1^2 + x_2^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^2 + x_2^2 \geq R^2$$



Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Rotation bei E-Feldern

Wir betrachten wieder das E-Feld des unendlich langen, homogenen Zylinders…

Innenfeld: $\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$

Außenfeld: $\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 (x_1^2 + x_2^2)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^2 + x_2^2 \geq R^2$



Wir berechnen die Rotation…

$$\text{rot}\, \vec{E} = \vec{0}$$

Ist das Zufall oder verschwindet die Rotation immer?

Rotation bei E-Feldern

Es gilt generell für alle (statischen) E-Felder $\vec{E}$:

Maxwell Gleichung (Elektrostatik):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Rotation bei E-Feldern

Es gilt generell für alle (statischen) E-Felder $\vec{E}$:

Maxwell Gleichung (Elektrostatik):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Physikalische Interpretation/Bedeutung:

Da die Rotation null ist, besitzt das E-Feld keine Wirbel. Die „Wasserräder" drehen sich nicht.

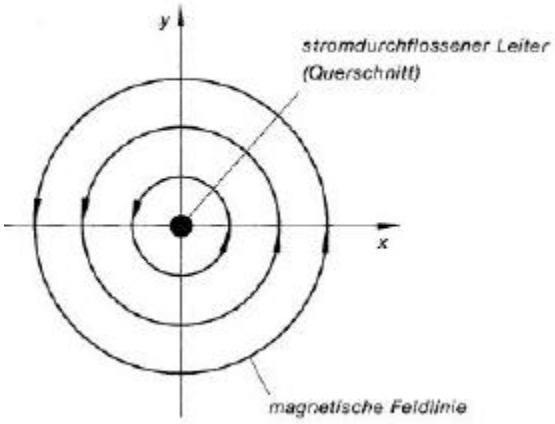
Vektoranalysis

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Rotation bei B-Feldern

Wir betrachten wieder das B-Feld des stromdurchflossenen Leiters…

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



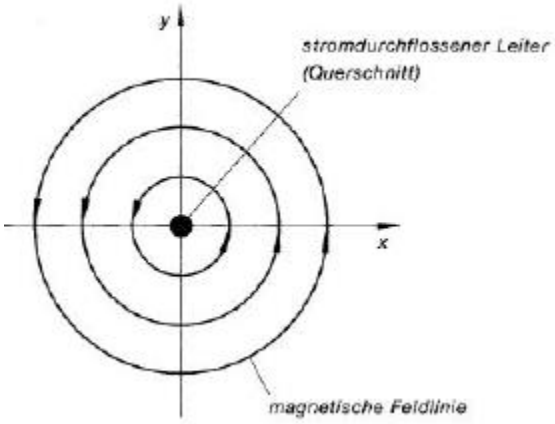
Vektoranalysis

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Rotation bei B-Feldern

Wir betrachten wieder das B-Feld des stromdurchflossenen Leiters…

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wenn wir ein Wasserrad in die Feldlinien setzen, dann rotiert es, da sich die Stärke des Feldes mit dem Abstand zum Ursprung verändert…

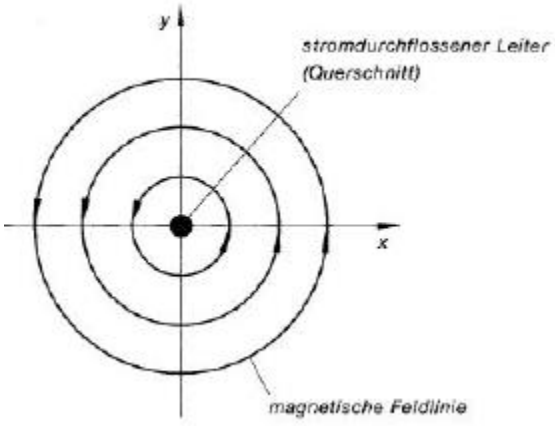
Vektoranalysis

Anwendungen Divergenz und Rotation

Beispiel: Rotation bei B-Feldern

Wir betrachten wieder das B-Feld des stromdurchflossenen Leiters…

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wenn wir ein Wasserrad in die Feldlinien setzen, dann rotiert es, da sich die Stärke des Feldes mit dem Abstand zum Ursprung verändert…

Wir berechnen die Rotation…

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ist das Zufall?

Stromdichte $\vec{j}$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Rotation bei B-Feldern

Es gilt generell für alle (statischen) B-Felder $\vec{B}$:

Maxwell Gleichung (Amperesches Gesetz):

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Anwendungen Divergenz und Rotation

Rotation bei B-Feldern

Es gilt generell für alle (statischen) B-Felder $\vec{B}$:

Maxwell Gleichung (Amperesches Gesetz):

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Physikalische Interpretation/Bedeutung:

Der Strom, beschrieben durch die Stromdichte $\vec{j}$ erzeugt ein magentisches Wirbelfeld, nach der Rechten-Hand-Regel.

Maxwell Gleichungen

Maxwell Gleichungen für statische Felder

Elektrostatik	Magnetostatik
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Beobachtung:

Im statischen Fall, d.h. wenn die Felder zeitunabhängig sind, sind elektrische und magnetische Phänomene getrennt voneinander.

Was passiert, wenn sich die Felder mit der Zeit ändern?

Maxwell Gleichungen

Faraday‘sche Induktionsgesetz

Ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt (induziert) ein elektrisches Feld.

Die induzierte Spannung ist durch geschlossene, elektrische Feldlinien gekennzeichnet.

→ Es handelt sich um ein Wirbelfeld, d.h. die Rotation ist ungleich null.

→ $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Vektoranalysis

Maxwell Gleichungen

Faraday‘sche Induktionsgesetz

Ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt (induziert) ein elektrisches Feld.

Die induzierte Spannung ist durch geschlossene, elektrische Feldlinien gekennzeichnet.

→ Es handelt sich um ein Wirbelfeld, d.h. die Rotation ist ungleich null.

→ $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Bedeutung:

Ein sich zeitlich veränderndes B-Feld (Zeitableitung ungleich null), erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Unsymmetrische Gesetze

Die Gleichungen scheinen nicht vollständig zu sein…

Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Unsymmetrische Gesetze

Die Gleichungen scheinen nicht vollständig zu sein…

Beobachtung von Maxwell:

Beim Aufladen eines Kondensators (veränderliches E-Feld) stimmt das Ampere‘sche Gesetz zu Beginn nicht!

⇒ „Verschiebestrom“ $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell Gleichungen

Theoretisches Argument für Unvollständigkeit…

Wir betrachten die Rotation für Magnetfelder…

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

Vektoranalysis

Maxwell Gleichungen

Theoretisches Argument für Unvollständigkeit…

Wir betrachten die Rotation für Magnetfelder…

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

Für alle Vektorfelder gilt allgemein: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Maxwell Gleichungen

Theoretisches Argument für Unvollständigkeit…

Wir betrachten die Rotation für Magnetfelder…

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

Für alle Vektorfelder gilt allgemein: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Diese Aussage ist aber nicht immer wahr. So kann der Stromfluss aus einer Oberfläche positiv oder negativ sein, wenn z.B. im Innern Quellen bzw. Senken (d.h. geladene Teilchen) vorhanden sind.

Vektoranalysis

Maxwell Gleichungen

Theoretisches Argument für Unvollständigkeit…

Wir betrachten die Rotation für Magnetfelder…

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

Für alle Vektorfelder gilt allgemein: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Diese Aussage ist aber nicht immer wahr. So kann der Stromfluss aus einer Oberfläche positiv oder negativ sein, wenn z.B. im Innern Quellen bzw. Senken (d.h. geladene Teilchen) vorhanden sind.

Damit ist die Ausgangsgleichung inkonsistent und muss angepasst werden.

Was verändert Maxwell's neuer Term?

Wir berechnen die Divergenz…

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{=0} = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{=\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Was verändert Maxwell's neuer Term?

Wir berechnen die Divergenz…

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{=0} = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{=\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Diese Gleichung wird als Kontinuitätsgleichung (Konti-Gleichung) bezeichnet.

Konti-Gleichungen beschreiben allgemein die Erhaltung von physikalischen Größen, hier die Ladungserhaltung.

Maxwell Gleichungen

Vollständige Maxwell Gleichungen

Für allgemeine, zeitlich veränderliche E- und B-Felder gelten die folgenden vier Maxwell Gleichungen…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ Gaußsches Gesetz

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$ Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Faradysche Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Erweitertes Amperesches Gesetz